1 (解答欄)

条件①より、mは2の倍数であるため偶数であり、条件②と併せて考えてnは偶数である。

条件① $\Leftrightarrow$ $n = \frac{9}{2}m + 1$ …③

法を10として③について考えると、

$m \equiv 0$ のとき、$n \equiv 1, 6$

$m \equiv 2$ のとき、$n \equiv 0, 5$

$m \equiv 4$ のとき、$n \equiv 4, 9$

$m \equiv 6$ のとき、$n \equiv 3, 8$

$m \equiv 8$ のとき、$n \equiv 2, 7$

条件②も満たすのは $m \equiv n \equiv 4$ のときのみであり、このとき $\frac{9}{2}m + 1 \equiv 4$ より、

$\frac{9}{2}m \equiv 3 \pmod{10}$ …④

④が成り立つのは $m \equiv 14, 34, 54, 74, 94 \pmod{100}$ のとき。

以下、法を100として③について考えると、

$m \equiv 14$ のとき、$n \equiv 14, 64$

$m \equiv 34$ のとき、$n \equiv 4, 54$

$m \equiv 54$ のとき、$n \equiv 44, 94$

$m \equiv 74$ のとき、$n \equiv 34, 84$

$m \equiv 94$ のとき、$n \equiv 24, 74$

条件②も満たすのは $m \equiv n \equiv 14 \pmod{100}$ のときのみである。

$m = 14, 114, \cdots$ と小さい数から③に代入していくと、$(m, n) = (14, 64), (114, 514), \cdots$

mが最小となる組(m, n)は、$(m, n) = (114, 514)$ //

氏名	受験番号
田所 浩二	1 1 4 5 1 4

理 1
40

2 (解答欄)

$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ とおく。$(r>0,\ 0 \leqq \theta < 2\pi)$

このとき、与式は $r^2\left(1-\frac{9}{5}\sin\theta\cos\theta\right)=16$ となる。

$r>0$ より、$r = \dfrac{4}{\sqrt{1-\frac{9}{5}\sin\theta\cos\theta}}$

$$r = \frac{4}{\sqrt{1-\frac{9}{10}\sin 2\theta}} \quad \cdots ①$$

r が最大となるのは $\sqrt{1-\frac{9}{10}\sin 2\theta}$ が最小となるときであり、このとき

$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi$ で $r = 4\sqrt{10}$ $\cdots ②$

ここで、r は原点 $(0,0)$ からの距離を表すため、① の式に含まれる全ての点は原点からの距離が $4\sqrt{10}$ 以下である。

つまり、① の式に含まれる点は、中心 $(0,0)$ で半径 $4\sqrt{10}$ の円の円上または内部に含まれるといえる。

中心 $(0,0)$ で半径 $4\sqrt{10}$ の円上に、距離が $8\sqrt{10}$ よりも離れた2点をとることはできないため、① の式においても2点間の距離 L は $8\sqrt{10}$ を超えない。

② より、$(r,\theta) = \left(4\sqrt{10}, \frac{\pi}{4}\right)$ と $\left(4\sqrt{10}, \frac{5}{4}\pi\right)$ の2点は、その間の距離が $8\sqrt{10}$ であるため、これが求める L の最大値である。

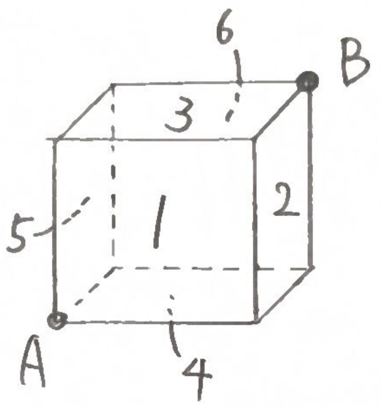
以上より、L の最大値は $8\sqrt{10}$ //

氏名	受験番号					
田所浩二	1	1	4	5	1	4

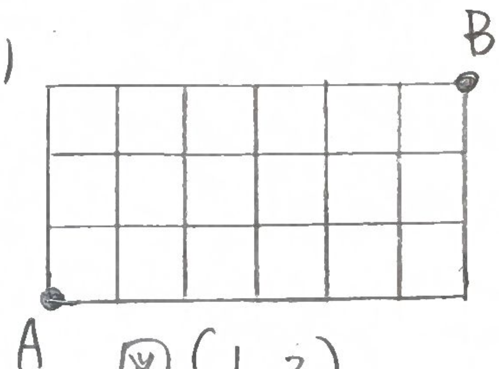
理 2
40

3 (解答欄)

(1) 右図のように
サイコロと同様に
1〜6の番号を各面
に振る。



1と2の面を切り
とって展開した
ものを(1,2)と
表す。



図(1,2)

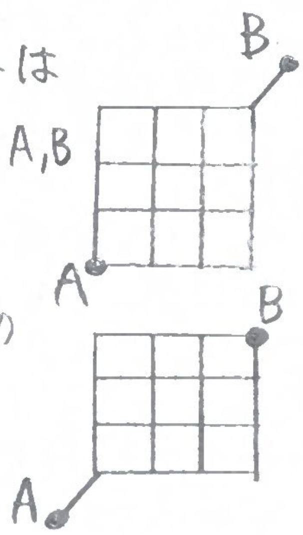
図(1,2)に
おいてA→Bへと行く方法は、

$\dfrac{9!}{6!3!} = 84$ より 84通りである。

(4,2), (4,6), (5,6), (5,3), (1,3)
についても同様にして、

$84 \times 6 = 504$

ここで、重複している経路は
右図のように立方体の点A,B
以外の頂点を通るような
経路であり、該当する6つの
頂点について考えると



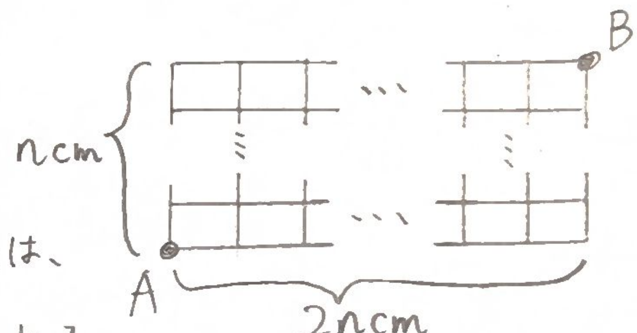
$\dfrac{6!}{3!3!} \times 6 = 120$

以上より $504 - 120 = 384$ 　<u>384通り</u>//

(2)
(1)より、点A, B以外のとある頂点を通るのは、
$\dfrac{6!}{3!3!} = 20$ より20通りである。

$384 - 20 = 364$ 　<u>364通り</u>//

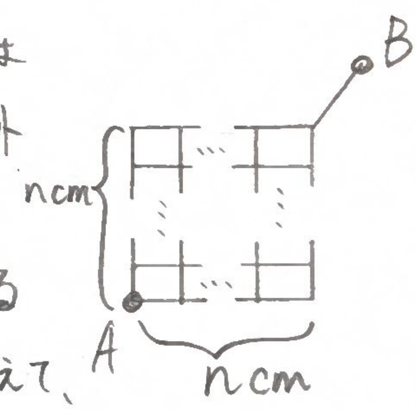
(3)
図(1,2)に
おいてA→B
へと行く方法は、
${}_{3n}C_n$ で表される。



図(1,2)

(4,2), (4,6), (5,6), (5,3), (1,3)についても
同様なため、 ${}_{3n}C_n \times 6$

重複している経路は
立方体の点A, B以外
の頂点を通るような
経路であり、該当する
6つの頂点について考えて、



$6 \cdot {}_{2n}C_n$ 通り。

以上より、

$6 \cdot {}_{3n}C_n - 6 \cdot {}_{2n}C_n$

<u>$6({}_{3n}C_n - {}_{2n}C_n)$ 通り</u>//

氏名	受験番号	理 3
田所浩二	114514	18+6+16

4 (解答欄)

$f^{(n)}(x) = e^x + (-t)^n e^{-tx}$

(1) nが奇数のとき、$(-1)^n = -1$ となる。

$f^{(n)}(x) = e^x - t^n e^{-tx}$

$f^{(n+1)}(x) = e^x + t^{n+1} e^{-tx}$

$t>1$ において $t^{n+1}>1$ であり、

$e^x>0$, $e^{-tx}>0$ であるため

$f^{(n+1)}(x)>0$ が常に成り立つ。

従って $f^{(n)}(x)$ は単調増加となり、

$f^{(n)}(x)=k$ が2つ以上の解をもつような定数kは存在しないといえる。

(2) nが偶数のとき $(-1)^n=1$ となる。

$f^{(n)}(x) = e^x + t^n e^{-tx}$

$f^{(n+1)}(x) = e^x - t^{n+1} e^{-tx}$

$f^{(n+1)}(x)=0$ は $x=\frac{(n+1)\log t}{t+1}$ のとき

$$f^{(n)}\left(\frac{(n+1)\log t}{t+1}\right) = t^{\frac{n+1}{t+1}} + t^n \cdot t^{\frac{-t(n+1)}{t+1}}$$
$$= t^{\frac{n+1}{t+1}} + t^{\frac{n-t}{t+1}}$$

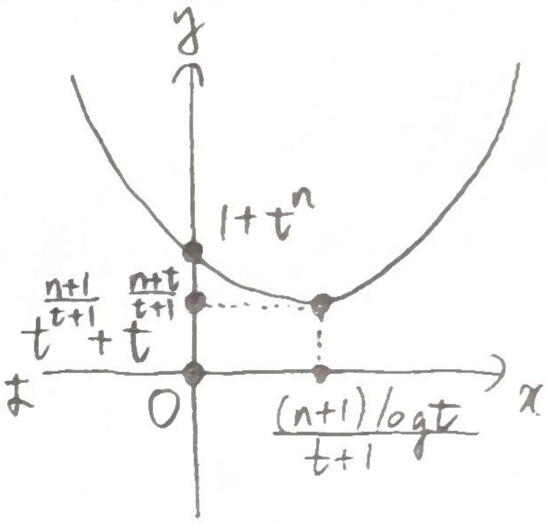
x	…	$\frac{(n+1)\log t}{t+1}$	…
$f^{(n+1)}(x)$	−	0	+
$f^{(n)}(x)$	↘	$t^{\frac{n+1}{t+1}} + t^{\frac{n-t}{t+1}}$	↗

増減表及び

$\lim_{x\to-\infty} f^{(n)}(x) = \infty$

$\lim_{x\to\infty} f^{(n)}(x) = \infty$

より、$f^{(n)}(x)$ の概形は右図の通りである。



$y=f^{(n)}(x)$ と $y=k$ の交点の数を考えて

$$\underline{k > t^{\frac{n+1}{t+1}} + t^{\frac{n+t}{t+1}}}\ //$$

(3) nが奇数であるため、

$f^{(n+2)}(x) = e^x - t^{n+2} e^{-tx}$

$f^{(n+2)}(x)=0$ となるとき、$x=\frac{(n+2)\log t}{t+1}$

$$f^{(n)}\left(\frac{(n+2)\log t}{t+1}\right) = t^{\frac{n+2}{t+1}} + t^{\frac{n-t+1}{t+1}}$$

従って変曲点の座標(X,Y)は、

$$(X,Y) = \left(\frac{(n+2)\log t}{t+1},\ t^{\frac{n+2}{t+1}} + t^{\frac{n-t+1}{t+1}}\right)$$

$t>1$ において　$0<\frac{(n+2)\log t}{t+1}<\frac{(n+2)\log t}{t}$

$\lim_{t\to\infty}\frac{(n+2)\log t}{t} = 0$ より、$\lim_{t\to\infty}\frac{(n+2)\log t}{t+1} = 0$

また、$\log\left(t^{\frac{n+2}{t+1}}\right) = \frac{(n+2)\log t}{t+1}$ より、

$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{n+2}{t+1}} = 1$ となる。

以上より、$\lim_{t\to\infty} X = \lim_{t\to\infty}\frac{(n+2)\log t}{t+1} = \underline{0}$

$\lim_{t\to\infty} Y = \lim_{t\to\infty} t^{\frac{n+2}{t+1}}(1+t^{-1}) = \underline{1}\ //$

氏名	受験番号	理 4
田所 浩二	1 1 4 5 1 4	10+16+14

5 (解答欄)

(1) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = \sum_{k=1}^{n}\{(k+1)k! - k!\}$

$= \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k!$

$= (n+1)! - 1$

(2) $a_{n+1}=(1920-n)a_n - 1$ の両辺に

$(1919-n)!$ をかけると、

$(1919-n)!\,a_{n+1} = (1920-n)!\,a_n - (1919-n)!$

ここで、$b_n=(1920-n)!\,a_n$ とする。

$b_{n+1} = b_n - (1919-n)!$

$b_{n+1}-b_n = -(1919-n)!$

$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k) = -\sum_{k=1}^{n-1}(1919-k)!$

$\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=b_n-b_1$ となるため、

$b_n - b_1 = -\sum_{k=1}^{n-1}(1919-k)!$

$b_n = b_1 - \sum_{k=1}^{n-1}(1919-k)!$

ここで $a_1=1$ より、

$b_1=(1920-1)!\cdot 1 = 1919!$

$\therefore b_n = 1919! - \sum_{k=1}^{n-1}(1919-k)!$

$n=1920$ を代入して

$b_{1920} = 1919! - \sum_{k=1}^{1919}(1919-k)!$

$b_{1920}=(1920-1919)!\,a_{1920}=a_{1920}$ より、

$a_{1920}=1919!-\sum_{k=1}^{1919}(1919-k)!$

$\sum_{k=1}^{1919}(1919-k)! = 1+\sum_{k=1}^{1918}k!$ が成り立つため、

$a_{1920}=1919!-\sum_{k=1}^{1918}k!-1$

(3) (1)より、$\sum_{k=1}^{1918}k\cdot k! = 1919!-1$

$a_{1920} = (1919!-1)-\sum_{k=1}^{1918}k!$

$=\sum_{k=1}^{1918}k\cdot k! - \sum_{k=1}^{1918}k!$

$=\sum_{k=1}^{1918}(k-1)k!$

$=1917\cdot(1918!)+\sum_{k=1}^{1917}(k-1)k!$

$a_{1920}-1917\cdot(1918!)$

$=\sum_{k=1}^{1917}(k-1)k! > 0$ が成り立つため、

$a_{1920} > 1917\cdot(1918!)$ //

氏名	受験番号						理 5
田所浩二	1	1	4	5	1	4	4+22+14

6 （解答欄）

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x - a\sin x}{\sin x + a\cos x}\,dx$

$= \Big[\log|\sin x + a\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \underline{-\log a}$

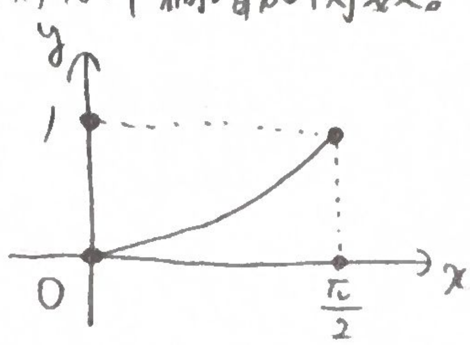
(2) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sin x + t\cos x}$ とする。

$\dfrac{df}{dx} = \dfrac{t}{(\sin x + t\cos x)^2}$ より、

$1 \leqq t$ において $f(x)$ は単調増加関数。

$f(0)=0,\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$

$f(x)$ の概形は右図の通り。



また、$1 \leqq b < c \leqq \sqrt{11}$ とすると、$0<x<\frac{\pi}{2}$ では

$$\frac{\sin x}{\sin x + b\cos x} - \frac{\sin x}{\sin x + c\cos x}$$

$$= \frac{(c-b)\sin x\cos x}{(\sin x + b\cos x)(\sin x + c\cos x)} > 0$$

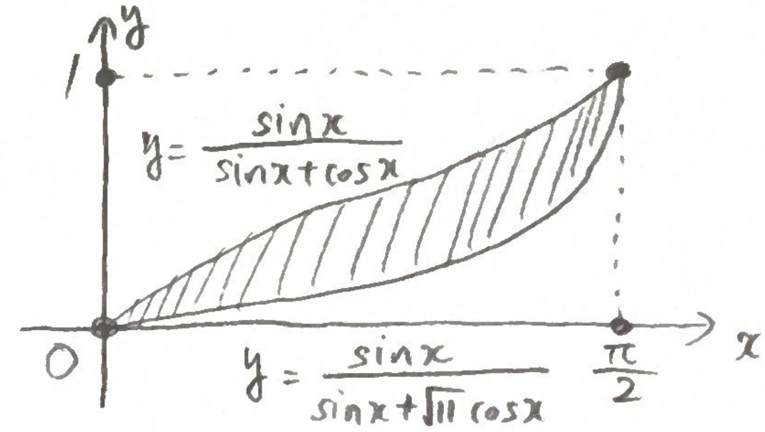
となり、

$$\frac{\sin x}{\sin x + b\cos x} > \frac{\sin x}{\sin x + c\cos x}$$

が $0<x<\frac{\pi}{2}$ においては常に成り立つ。

つまり、tが増加するにつれ $f(x)$ は下へ移動する。

以上より、$f(x)$ の動く領域は、下図の斜線部であることが分かる。(境界を含む)



求める面積を S とする。

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sin x + \cos x} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sin x + \sqrt{11}\cos x}$$

ここで、$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\,dx}{\sin x + a\cos x}$

$$= \frac{1}{a^2+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x + a\cos x}{\sin x + a\cos x} - a\cdot\frac{\cos x - a\sin x}{\sin x + a\cos x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{a^2+1}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x - a\sin x}{\sin x + a\cos x}\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{a^2+1}\left(\frac{\pi}{2} + a\log a\right)$$

となるため、

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - \frac{1}{12}\left(\frac{\pi}{2} + \sqrt{11}\log\sqrt{11}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi + \sqrt{11}\log 11}{24}$$

$$= \underline{\frac{5\pi - \sqrt{11}\log 11}{24}}\ //$$

氏名	受験番号	理 6
田所浩二	1 1 4 5 1 4	4+36